

Identitätssatz für Potenzreihen

a) Die Potenzreihe $P(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ habe einen positiven Konvergenzradius ρ . In jedem Punkt des Konvergenzkreises gelte $P(z) = P(-z)$. Zeigen Sie, dass dann $a_n = 0$ für alle ungeraden n gilt.

b) Gibt es Potenzreihen $P(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k$ mit Konvergenzradius $\rho > 1$, die in den Punkten $z = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$ der Reihe nach die Werte

$$\text{i) } \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots \quad \text{bzw.} \quad \text{ii) } \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \dots$$

annehmen?